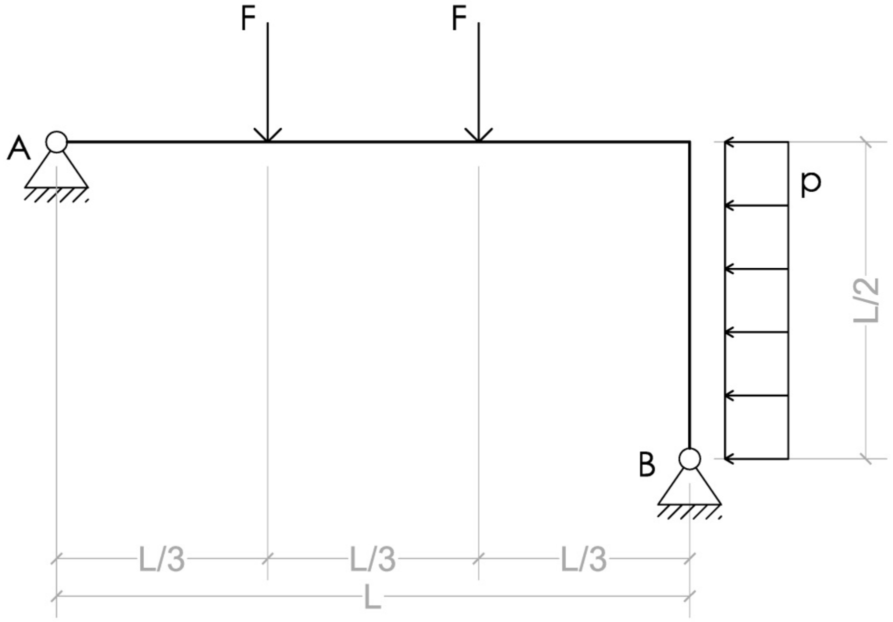
Andrea Valenzi
Ingegnere Civile e Ambientale
servizi per l'ingegneria e l'architettura
www.andreavalenzi.com
info@andreavalenzi.com
02100 - Rieti (RI)

DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI
E DIAGRAMMI DELLE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE

ESERCIZIO



DATI:

$L = 300 \text{ cm}$

$F = 80 \text{ kN}$

$p = 10 \text{ kN/m}$

$E\,A \rightarrow \infty$

$G\,A^* \rightarrow \infty$

1) ANALISI CINEMATICA E STATICA DEL SISTEMA

Il sistema è piano e costituito da un solo corpo, il quale risulta essere vincolato esternamente in A e in B da due cerniere.
I vincoli presenti risultano essere ben disposti e avere una molteplicità totale tale da rendere il sistema STATICAMENTE INDETERMINATO O IPERSTATICO:

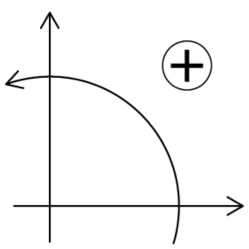
$$g.d.l._{tot} = 3 \qquad m_{tot} = m_A + m_B = 2 + 2 = 4$$

$$m_{tot} > g.d.l._{tot}$$

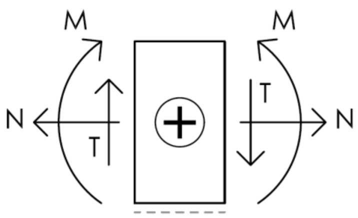
Per tale ragione il sistema NON potrà essere risolto (riferendoci alle reazioni vincolari e c.d.s.) imponendo le sole condizioni di equilibrio. Per tale ragione si dovrà considerare il corpo come deformabile ed unire la statica alla cinematica attraverso il legame costitutivo.

2) CONVENZIONI POSITIVE

EQUILIBRIO

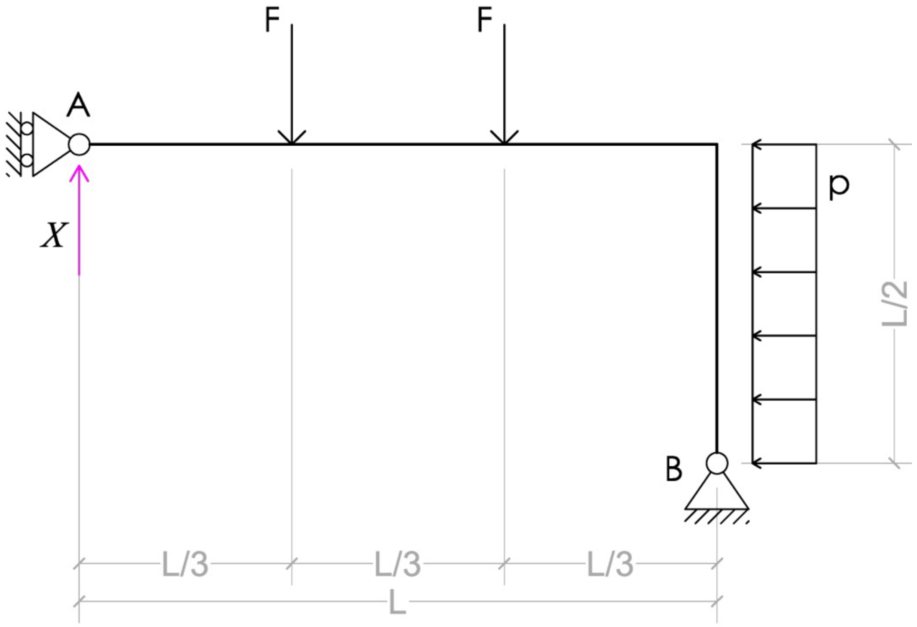


C.D.S.

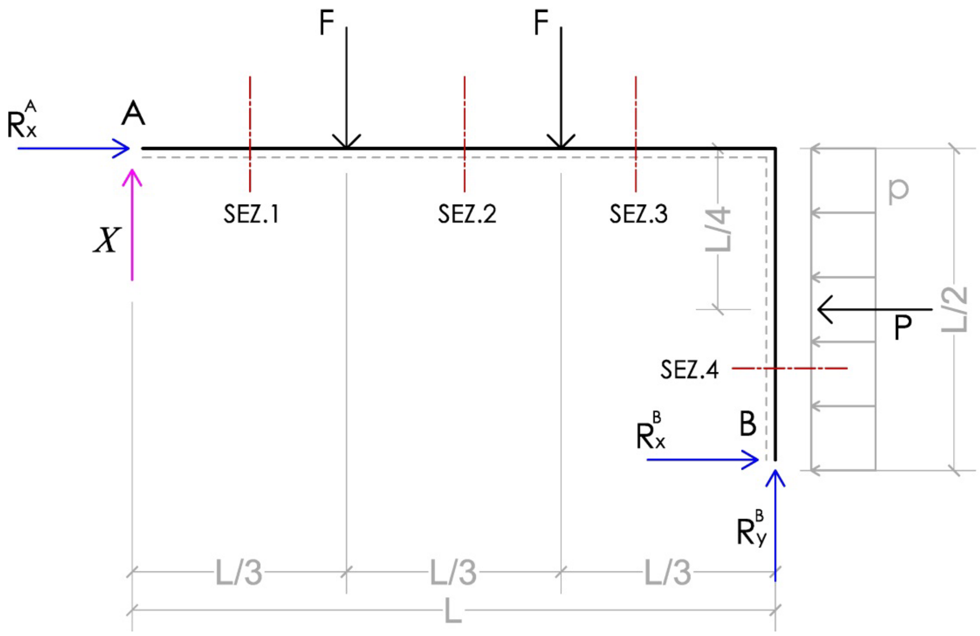


3) SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE (^)

Volendo studiare il problema attraverso l'applicazione del metodo delle forze, procediamo costruendo un sistema isostatico principale: si rende il sistema isostatico attraverso l'eliminazione dei vincoli sovrabbondanti (facendo attenzione a non rendere il sistema degenere) e l'inserimento delle rispettive **incognite iperstatiche**, le quali verranno ad essere considerate come forze esterne "note".



Procediamo togliendo i vincoli ed inserendo le rispettive reazioni vincolari ipotizzandone i versi.
Inseriamo inoltre (solo per lo svolgimento dei calcoli) la forza concentrata equivalente al carico distribuito.



A questo punto trattiamo il sistema come se fosse isostatico: determiniamo le reazioni vincolari e successivamente le c.d.s. Risulta comunque evidente che quanto si andrà a determinare sarà chiaramente funzione dell'incognita iperstatica X.

Imponiamo l'equilibrio globale del sistema piano con la scrittura delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \sum_i F_{x_i} = 0 \\ \sum_i F_{y_i} = 0 \\ \sum_i M_i^{(o)} = 0 \end{cases}$$

- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x^A + R_x^B - p \cdot \frac{L}{2} = 0 \qquad R_x^B = \frac{1}{2} pl - R_x^A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 - R_x^A = 15 - R_x^A \ \ [kN]$

- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad X + R_y^B - F - F = 0$
  $R_y^B = 2F - X = 160 - X \ \ [kN]$

- $\sum_i M_i^{(B)} \Rightarrow \ +F \cdot \frac{L}{3} + F \cdot \frac{2}{3} L + p \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} - X \cdot L - R_x^A \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad R_x^A \cdot \frac{L}{2} = F \cdot L + \frac{1}{8} \cdot p \cdot L^2 - X \cdot L$
  $$R_x^A = 2F + \frac{1}{4} pL - 2X$$
  $R_x^A = 160 + \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 3 - 2X = 167{,}5 - 2X \ \ [kN]$

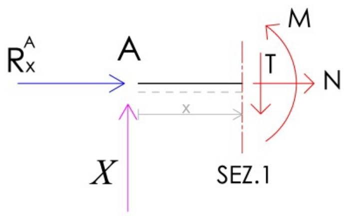
sostituendo nella seconda equazione:

$R_x^B = 15 - (167{,}5 - 2X) = -152{,}5 + 2X \ \ [kN]$

Procediamo ora con il calcolo delle c.d.s. praticando delle "sezioni" in punti diversi dell'elemento e imponendo l'equilibrio del corpo "tagliato". In corrispondenza della generica sezione verranno inserite le c.d.s. secondo la convenzione positiva dei segni.

SEZ.1 $\quad (0 \leq x \leq 100 \text{ cm})$

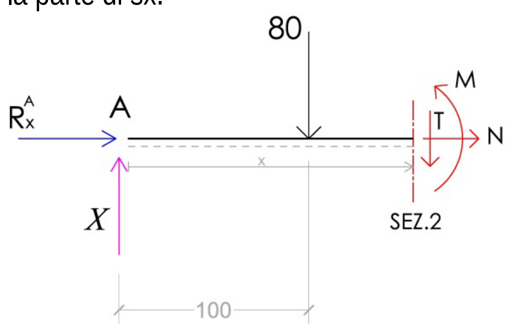
Scegliamo di mettere in equilibrio la parte di sx.



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x^A + N(x) = 0 \qquad N(x) = -R_x^A \ \ [kN]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad X - T(x) = 0 \qquad T(x) = X \ \ [kN]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad -X \cdot x + M(x) = 0 \qquad M(x) = X \cdot x \ \ [kNm]$

SEZ.2 $\quad (100 \leq x \leq 200 \text{ cm})$

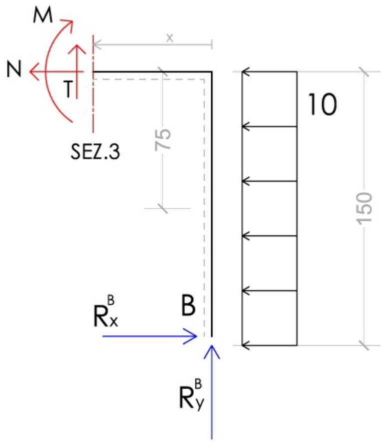
Scegliamo di mettere in equilibrio la parte di sx.



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x^A + N(x) = 0 \qquad N(x) = -R_x^A \;\; [kN]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad X - 80 - T(x) = 0 \qquad T(x) = X - 80 \;\; [kN]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad -X \cdot x + 80 \cdot (x - 1) + M(x) = 0 \qquad M(x) = X \cdot x - 80 \cdot x + 80 \;\; [kNm]$

<u>SEZ.3</u> $(\, 0 \leq x \leq 100 \text{ cm} \,)$

In questo caso decidiamo di mettere in equilibrio la parte di dx.

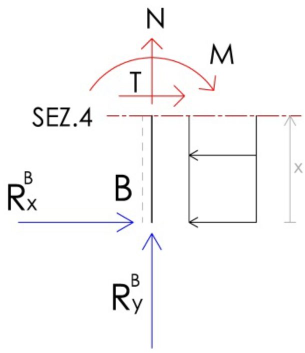


- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x^B - 10 \cdot 1{,}5 - N(x) = 0 \qquad N(x) = R_x^B - 10 \cdot 1{,}5 \;\; [kN]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y^B + T(x) = 0 \qquad T(x) = -R_y^B \;\; [kN]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad R_y^B \cdot x + R_x^B \cdot 1{,}5 - 10 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}75 - M(x) = 0$

  $M(x) = R_y^B \cdot x + R_x^B \cdot 1{,}5 - 11{,}3 \;\; [kNm]$

<u>SEZ.4</u> $(\, 0 \leq x \leq 150 \text{ cm} \,)$

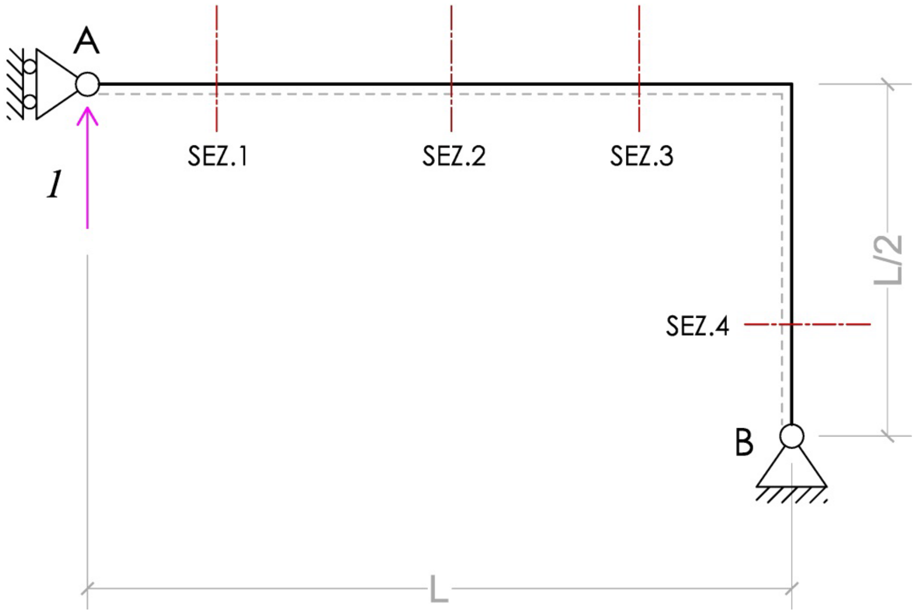
Mettendo in equilibrio sempre la parte di dx ricaviamo:



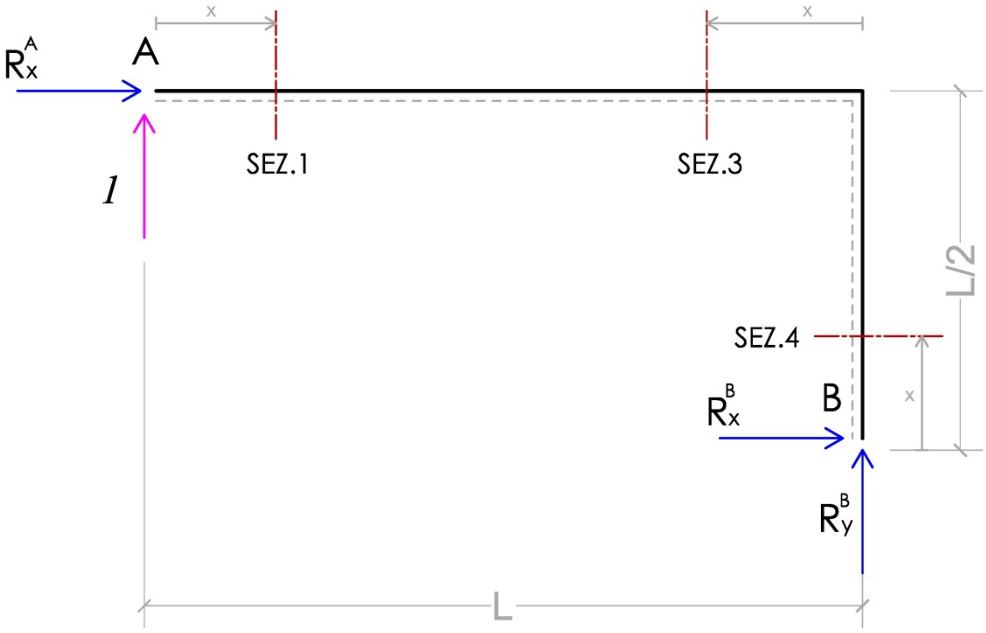
- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x^B - 10 \cdot x + T(x) = 0 \qquad T(x) = -R_x^B + 10 \cdot x \;\; [kN]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y^B + N(x) = 0 \qquad N(x) = -R_y^B \;\; [kN]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad R_x^B \cdot x - 10 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - M(x) = 0 \qquad M(x) = R_x^B \cdot x - 5 \cdot x^2 \;\; [kNm]$

4) SISTEMA VIRTUALE (*)

Si procede ora con la definizione del cosiddetto sistema virtuale, il quale ci risulterà utile per la successiva applicazione del Teorema dei Lavori Virtuali. I sistemi virtuali saranno tanti quante sono le incognite iperstatiche e sono definiti a partire dal sistema principale considerando su di esso agenti le sole incognite iperstatiche supposte, in questo, caso di valore unitario.



Ci si rende subito conto come in questo caso la sez.2 sia superflua poiché equivalente alla sez.1
Anche in questo caso si procede con la risoluzione del semplice sistema isostatico; determinando reazioni vincolari e c.d.s..



Imponiamo l'equilibrio globale del sistema:

$$\begin{cases} \sum_i F_{x_i} = 0 \\ \sum_i F_{y_i} = 0 \\ \sum_i M_i^{(o)} = 0 \end{cases}$$

- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x^A + R_x^B = 0 \qquad R_x^B = -R_x^A \ \ [kN]$

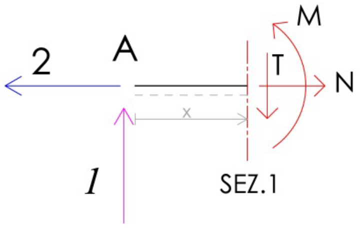
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + R_y^B = 0 \qquad R_y^B = -1 \ \ [kN]$
- $\sum_i M_i^{(B)} \Rightarrow \ -1 \cdot L - R_x^A \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad R_x^A \cdot \frac{L}{2} = -1 \cdot L \qquad R_x^A = -2 \ \ [kN]$

sostituendo nella seconda equazione:

$$R_x^B = -(-2) = 2 \ \ [kN]$$

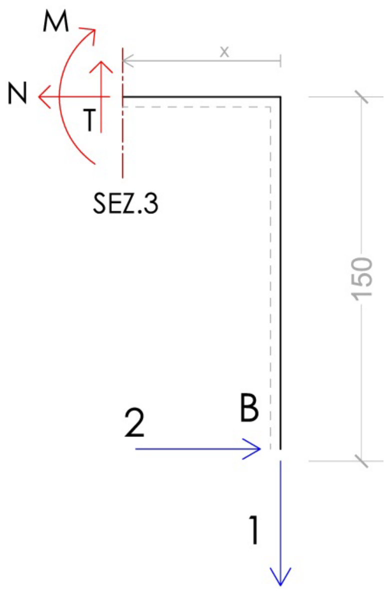
Calcoliamo le c.d.s.:

<u>SEZ.1</u> $(0 \leq x \leq 300 \text{ cm})$
Scegliamo di mettere in equilibrio la parte di sx.



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 + N(x) = 0 \qquad N(x) = 2 \ \ [kN]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - T(x) = 0 \qquad T(x) = 1 \ \ [kN]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot x + M(x) = 0 \qquad M(x) = 1 \cdot x \ \ [kNm]$

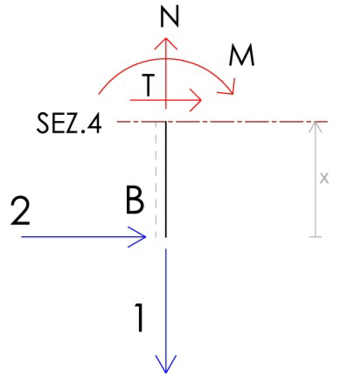
<u>SEZ.3</u> $(0 \leq x \leq 100 \text{ cm})$
In questo caso decidiamo di mettere in equilibrio la parte di dx.



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - N(x) = 0 \qquad N(x) = 2 \ \ [kN]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + T(x) = 0 \qquad T(x) = 1 \ \ [kN]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot x + 2 \cdot 1{,}5 - M(x) = 0 \qquad M(x) = -x + 3 \ \ [kNm]$

SEZ.4 $\quad (0 \leq x \leq 150 \text{ cm})$

Mettendo in equilibrio sempre la parte di dx ricaviamo:



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + T(x) = 0 \qquad T(x) = -2 \ [kN]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + N(x) = 0 \qquad N(x) = 1 \ [kN]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad +2 \cdot x - M(x) = 0 \qquad M(x) = 2 \cdot x \ [kNm]$

5) TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI (TLV)

Possiamo ora far riferimento al principio dei lavori virtuali: assegnato un sistema congruente e, indipendentemente, un sistema equilibrato, il lavoro virtuale esterno è uguale al lavoro virtuale interno.
Il lavoro esterno sarà quello prodotto dalle forze esterne sugli spostamenti, mentre il lavoro interno sarà quello prodotto dalle c.d.s. sulle deformazioni.
Le grandezze statiche (forze esterne e c.d.s.) saranno prese dal sistema equilibrato (*), mentre le grandezze cinematiche (spostamenti e deformazioni) saranno prese dal sistema congruente (^).

$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$

Poiché: $E\,A \rightarrow \infty$ e $G\,A^* \rightarrow \infty$, scriviamo:

$$\Rightarrow \ \mathcal{L}_e = \int_{struttura} \left\{ \overset{*}{M}(x) \cdot \hat{\chi}(x) \right\} dx = \int_{struttura} \left\{ \overset{*}{M}(x) \cdot \frac{\hat{M}(x)}{E\,I} \right\} dx$$

$$\Rightarrow \ \overset{*}{1} \cdot \hat{w}_a = \underbrace{\int_0^{\frac{L}{3}} \left\{ \overset{*}{M}(x) \cdot \frac{\hat{M}(x)}{E\,I} \right\} dx}_{\text{SEZ.1}} + \underbrace{\int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2}{3}L} \left\{ \overset{*}{M}(x) \cdot \frac{\hat{M}(x)}{E\,I} \right\} dx}_{\text{SEZ.2}} + \underbrace{\int_0^{\frac{L}{3}} \left\{ \overset{*}{M}(x) \cdot \frac{\hat{M}(x)}{E\,I} \right\} dx}_{\text{SEZ.3}} + \underbrace{\int_0^{\frac{L}{2}} \left\{ \overset{*}{M}(x) \cdot \frac{\hat{M}(x)}{E\,I} \right\} dx}_{\text{SEZ.4}} = 0$$

Essendo in questo caso esclusi cedimenti vincolari del vincolo in A, per la condizione fisica di vincolo si dovrà avere:

$$w_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_e = 0$$

Sostituendo:

$$\Rightarrow \ 1 \cdot w_a = \frac{1}{E\,I} \int_0^{\frac{L}{3}} \{x \cdot X \cdot x\} dx + \frac{1}{E\,I} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2}{3}L} \{x \cdot (X \cdot x - 80 \cdot x + 80)\} dx +$$

$$+ \frac{1}{E\,I} \int_0^{\frac{L}{3}} \{(-x + 3) \cdot [(160 - X) \cdot x + (-152{,}5 + 2X) \cdot 1{,}5 - 11{,}3]\} dx +$$

$$+\frac{1}{E\,I}\int_0^{\frac{L}{2}}\{2x\cdot[(-152{,}5+2X)\cdot x-5\cdot x^2]\}dx=0$$

$$\frac{X}{E\,I}\int_0^{\frac{L}{3}}x^2dx+\frac{X}{E\,I}\int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2}{3}L}x^2dx-\frac{80}{E\,I}\int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2}{3}L}x^2dx+\frac{80}{E\,I}\int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2}{3}L}x\,dx-\frac{160}{E\,I}\int_0^{\frac{L}{3}}x^2dx+\frac{X}{E\,I}\int_0^{\frac{L}{3}}x^2dx+\frac{720{,}1}{E\,I}\int_0^{\frac{L}{3}}x\,dx$$
$$-\frac{6X}{E\,I}\int_0^{\frac{L}{3}}x\,dx+\frac{9X}{E\,I}\int_0^{\frac{L}{3}}dx-\frac{720{,}3}{E\,I}\int_0^{\frac{L}{3}}dx-\frac{305}{E\,I}\int_0^{\frac{L}{2}}x^2dx+\frac{4X}{E\,I}\int_0^{\frac{L}{2}}x^2dx-\frac{10}{E\,I}\int_0^{\frac{L}{2}}x^3dx=0$$

$$\frac{X}{E\,I}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\frac{X}{E\,I}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2-\frac{80}{E\,I}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2+\frac{80}{E\,I}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2-\frac{160}{E\,I}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\frac{X}{E\,I}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\frac{720{,}1}{E\,I}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\frac{6X}{E\,I}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\frac{9X}{E\,I}[x]_0^1$$
$$-\frac{720{,}3}{E\,I}[x]_0^1-\frac{305}{E\,I}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1,5}+\frac{4X}{E\,I}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1,5}-\frac{10}{E\,I}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{1,5}=0$$

$$\frac{X}{3E\,I}+\frac{7X}{3E\,I}-\frac{560}{3E\,I}+\frac{120}{E\,I}-\frac{160}{3E\,I}+\frac{X}{3E\,I}+\frac{360}{E\,I}-\frac{3X}{E\,I}+\frac{9X}{E\,I}-\frac{720{,}3}{E\,I}-\frac{343{,}1}{E\,I}+\frac{9X}{2E\,I}-\frac{12{,}65}{E\,I}=0$$

$$\frac{X}{\cancel{E\,I}}\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{3}+\frac{1}{3}-3+9+\frac{9}{2}\right)=\frac{1}{\cancel{E\,I}}\left(\frac{560}{3}-120+\frac{160}{3}-360+720{,}3+343{,}1+12{,}65\right)$$

$13{,}5\,X=836{,}05$

$\Rightarrow \boxed{X=61{,}9\ \ [\mathrm{kN}]}$

6) CALCOLO REAZIONI VINCOLARI SISTEMA REALE

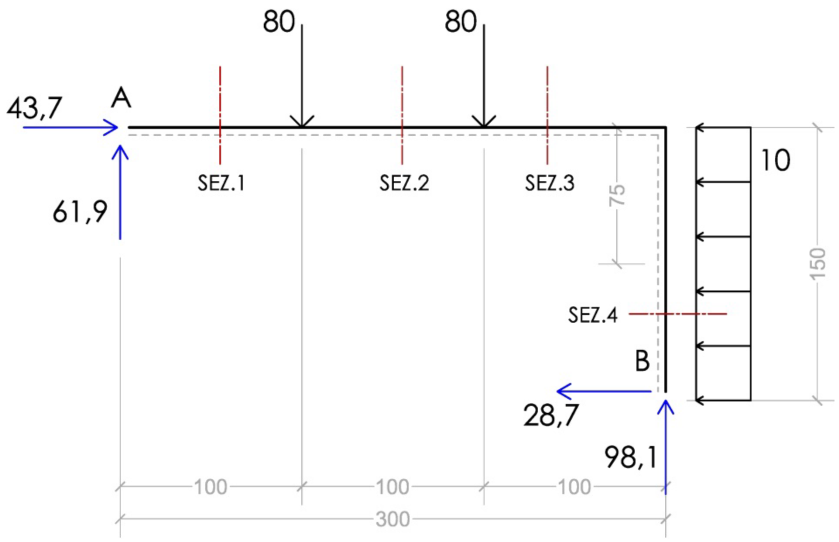
Possiamo ora calcolare le reazioni vincolari funzioni dell'incognita iperstatica:

$R_y^A=X=61{,}9\ \ [\mathrm{kN}]$

$R_y^B=2F-X=160-61{,}9=98{,}1\ \ [\mathrm{kN}]$

$R_x^A=160+\frac{1}{4}\cdot 10\cdot 3-2X=167{,}5-2\cdot 61{,}9=43{,}7\ \ [\mathrm{kN}]$

$R_x^B=-152{,}5+2X=-152{,}5+2\cdot 61{,}9=-28{,}7\ \ [\mathrm{kN}]$



Controlliamo ora, con le reazioni vincolari trovate e i carichi esterni applicati, se effettivamente il corpo si trova in equilibrio.

- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 43{,}7 - 28{,}7 - 10 \cdot 1{,}5 = 0 \qquad \surd$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 61{,}9 + 98{,}1 - 80 - 80 = 0 \qquad \surd$
- $\sum_i M_i^{(A)} \quad \Rightarrow \; -80 \cdot 1{,}0 - 80 \cdot 2{,}0 - 10 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}75 + 98{,}1 \cdot 3 - 28{,}7 \cdot 1{,}5 = 0 \qquad \surd$

7) SOLLECITAZIONI SISTEMA REALE

A questo punto, per determinare le c.d.s. del sistema reale basterà semplicemente sostituire il valore calcolato dell'incognita iperstatica (X) nelle relazioni precedentemente trovate (sistema isostatico principale ^).

SEZ.1 $\quad (\, 0 \leq x \leq 100 \text{ cm} \,)$

- $N(x) = -167{,}5 + 2X = -43{,}7 \;\; [kN]$
- $T(x) = X = 61{,}9 \;\; [kN]$
- $M(x) = X \cdot x = 61{,}9 \cdot x \;\; [kNm]$

Come ci si aspettava, nel tratto considerato, sforzo normale e taglio sono costanti; mentre il momento flettente varia con legge lineare.
Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $x = 0$
  $N(x) = -43{,}7 \;\; [kN]$
  $T(x) = 61{,}9 \;\; [kN]$
  $M(x) = 0 \;\; [kNm]$
- per $x = 100 \text{ cm}$
  $N(x) = -43{,}7 \;\; [kN]$
  $T(x) = 61{,}9 \;\; [kN]$
  $M(x) = 61{,}9 \;\; [kNm]$

SEZ.2 $\quad (\, 100 \leq x \leq 200 \text{ cm} \,)$

- $N(x) = -167{,}5 + 2X = -43{,}7 \;\; [kN]$
- $T(x) = X - 80 = -18{,}1 \;\; [kN]$
- $M(x) = X \cdot x - 80 \cdot x + 80 = -18{,}1 \cdot x + 80 \;\; [kNm]$

Anche in questo tratto sforzo normale e taglio sono costanti, mentre il momento flettente varia sempre con legge lineare.
Calcoliamo le funzioni agli estremi:

- per $x = 100$
  $N(x) = -43{,}7 \;\; [kN]$
  $T(x) = -18{,}1 \;\; [kN]$
  $M(x) = 61{,}9 \;\; [kNm]$

- per $x = 200 \text{ cm}$
  $N(x) = -43{,}7 \ [kN]$
  $T(x) = -18{,}1 \ [kN]$
  $M(x) = 43{,}8 \ [kNm]$

<u>SEZ.3</u> $(0 \leq x \leq 100 \text{ cm})$

- $N(x) = -152{,}5 + 2X - 10 \cdot 1{,}5 = -43{,}7 \ [kN]$
- $T(x) = -160 + X = -98{,}1 \ [kN]$
- $M(x) = (160 - X) \cdot x + (-152{,}5 + 2X) \cdot 1{,}5 - 11{,}3 = 98{,}1 \cdot x - 54{,}4 \ [kNm]$

Anche in questo tratto sforzo normale e taglio sono costanti, mentre il momento flettente varia sempre con legge lineare.
Le funzioni agli estremi valgono:

- per $x = 0$
  $N(x) = -43{,}7 \ [kN]$
  $T(x) = -98{,}1 \ [kN]$
  $M(x) = -54{,}4 \ [kNm]$
- per $x = 100 \text{ cm}$
  $N(x) = -43{,}7 \ [kN]$
  $T(x) = -98{,}1 \ [kN]$
  $M(x) = 43{,}7 \ [kNm]$

<u>SEZ.4</u> $(0 \leq x \leq 150 \text{ cm})$

- $N(x) = -160 + X = -98{,}1 \ [kN]$
- $T(x) = +152{,}5 - 2X + 10 \cdot x = +10 \cdot x + 28{,}7 \ [kN]$
- $M(x) = (-152{,}5 + 2X) \cdot x - 5 \cdot x^2 = -5 \cdot x^2 - 28{,}7 \cdot x \ [kNm]$

In questo tratto, invece, essendo presente un carico uniformemente distribuito (ortogonale all'asse della trave), il taglio varierà linearmente, mentre il momento flettente avrà andamento parabolico.
Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $x = 0$
  $N(x) = -98{,}1 \ [kN]$
  $T(x) = 28{,}7 \ [kN]$
  $M(x) = 0 \ kN \cdot m$
- per $x = 150 \text{ cm}$
  $N(x) = -98{,}1 \ [kN]$
  $T(x) = 43{,}7 \ [kNm]$
  $M(x) = -54{,}3 \ kN \cdot m$

Diagrammi delle c.d.s.