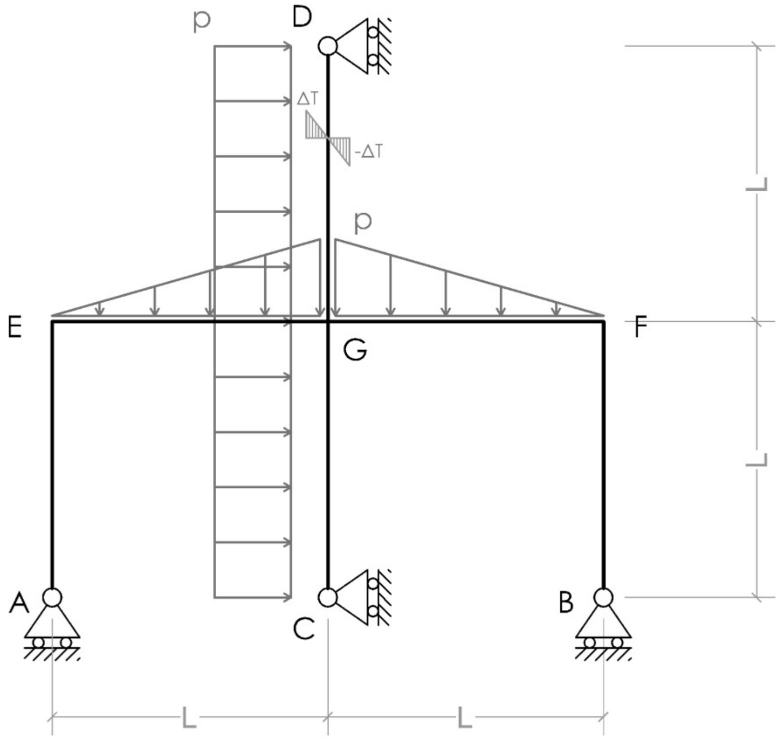
DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI E DIAGRAMMI DELLE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE

ESERCIZIO



DATI:

$L = 400\ \mathrm{cm}$

$p = 20\ \mathrm{kN/m}$

$E\,I = 6{,}4 \cdot 10^4\ \mathrm{kNm^2}$

$E\,A \rightarrow \infty$

$G\,A^* \rightarrow \infty$

$\Delta T = 20\ °C$

$h = 0{,}4\ \mathrm{m}$

$\alpha = 10^{-5}\ °C^{-1}$

1) ANALISI CINEMATICA E STATICA DEL SISTEMA

Il sistema è piano e costituito da un solo corpo, il quale risulta essere vincolato esternamente in A, B, C e in D da appoggi semplici.

I vincoli presenti risultano essere ben disposti, poiché gli assi che definiscono i carrelli non confluiscono tutti in uno stesso centro. La molteplicità totale è tale da rendere il sistema STATICAMENTE INDETERMINATO o IPERSTATICO:

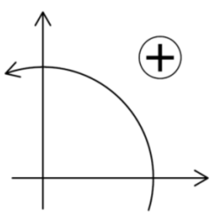
$$g.d.l._{tot} = 3 \qquad m_{tot} = m_A + m_B + m_C + m_D = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$m_{tot} > g.d.l._{tot}$$

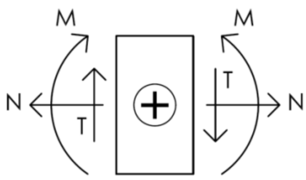
Per tale ragione il sistema NON potrà essere risolto (in termini di reazioni vincolari e C.d.S.) imponendo le sole condizioni di equilibrio: si dovrà considerare il corpo come deformabile ed unire la statica alla cinematica attraverso il legame costitutivo.

2) CONVENZIONI POSITIVE

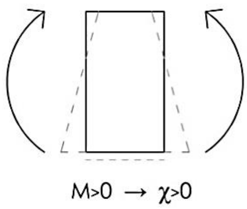
EQUILIBRIO



C.d.S.



DISTORSIONI TERMICHE



Il tratto di trave DG risulta soggetto a distorsioni termiche, infatti è presente una variazione termica del tipo a farfalla, la quale, non essendo uniforme su tutta l'altezza della trave, provocherà una curvatura dell'asse della trave.
La curvatura dovuta a variazioni di temperatura è definita dalla relazione:

$$\chi_t(x) = \frac{\Delta\mathcal{T}_{sup} - \Delta\mathcal{T}_{inf}}{h} \cdot \alpha$$

e si assumerà positiva se la distorsione termica a farfalla provoca un incurvamento della trave con concavità rivolta dalla parte opposta al "sotto" di riferimento.

3) PROCEDURA OPERATIVA DI RISOLUZIONE

Dal Teorema dei Lavori Virtuali, il quale stabilisce un vero e proprio legame fra tre situazioni indipendenti:

i. spostamenti e deformazioni congruenti
ii. forze esterne e interne equilibrate
iii. uguaglianza tra Lavoro Virtuale Esterno e Interno

è possibile dedurre una procedura atta a studiare i sistemi di travi iperstatici. Mantenendo valide le ipotesi[1] stabilite nello studio del problema elastico per la trave, tale procedura si articola nelle seguenti fasi:

1. SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE. Si sopprime dal sistema di partenza, *sistema effettivo* o *reale*, un numero di vincoli pari al grado di iperstaticità del sistema in modo da ottenere un sistema isostatico detto *sistema principale* (la sua definizione naturalmente non è univoca, ovvero può esistere più di un sistema isostatico principale). Si sostituisce poi al (o ai) vincolo soppresso la reazione incognita che esso esercita nel sistema reale e la si tratta quale azione esterna (*incognita iperstatica* X).
2. SISTEMA "0". Si considera il sistema principale e vi si applicano le sole forze esterne attive che agiscono nel sistema reale; Quindi si calcolano le caratteristiche della sollecitazione, $N_0\ T_0\ M_0$, che equilibrano le forze esterne nel sistema "0": ciò è sempre possibile essendo il sistema "0" isostatico per definizione.
3. SISTEMA "1". Si considera il sistema principale e vi si applica la sola incognita iperstatica cui si assegna un valore arbitrario (per comodità unitario). Si calcolano quindi le caratteristiche della sollecitazione, $N_1\ T_1\ M_1$, che equilibrano le forze esterne nel sistema "1".
4. INCOGNITA IPERSTATICA. Si determina l'incognita iperstatica X calcolando lo spostamento in corrispondenza del vincolo soppresso e imponendo che esso soddisfi le condizioni di compatibilità cinematica con il vincolo della struttura reale. Tale spostamento può essere calcolato ricorrendo al T.L.V., ovvero applicando la formula generale dello spostamento.
5. DIAGRAMMI FINALI. Ricavata la X, si determinano le caratteristiche delle sollecitazioni reali $N^{eff}, T^{eff}, M^{eff}$ mediante le seguenti formule che sfruttano il *principio di sovrapposizione degli effetti*:

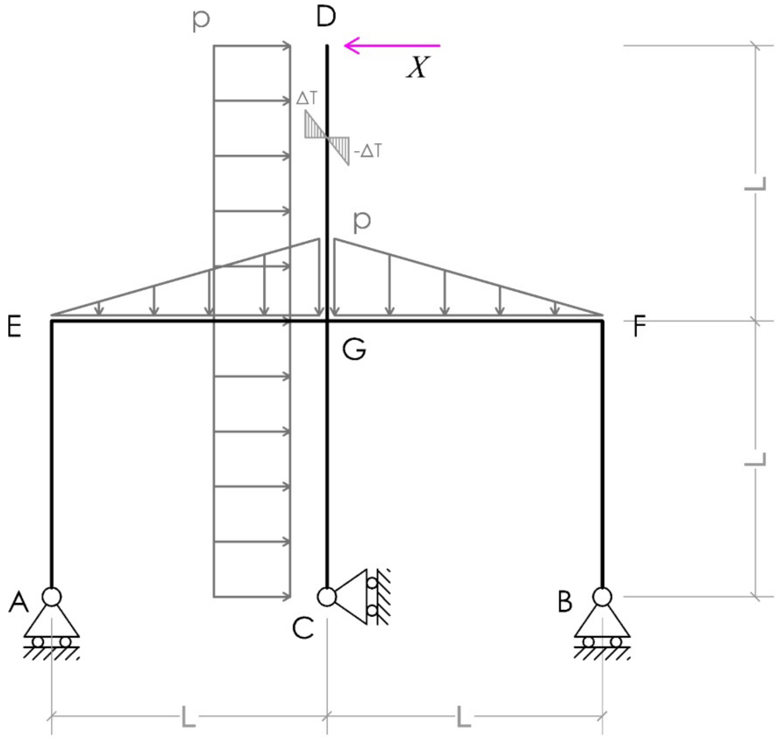
$$\begin{cases} N^{eff} = N_0 + X \cdot N_1 \\ T^{eff} = T_0 + X \cdot T_1 \\ M^{eff} = M_0 + X \cdot M_1 \end{cases}$$

Si definisce **sistema isostatico equivalente**, il sistema principale soggetto alle forze esterne attive e all'incognita iperstatica calcolata mediante l'equazione di congruenza. La risposta strutturale di questo sistema isostatico coincide con quella del sistema iperstatico assegnato.

[1] *Ipotesi 1*: gli spostamenti sono infinitesimi rispetto alla luce della trave; le rotazioni sono a loro volta grandezze infinitesime.
Ipotesi 2: le equazioni di equilibrio sia a livello globale (equazioni cardinali) che a livello del singolo elemento infinitesimo di trave (equazioni indefinite di equilibrio) possono essere scritte facendo riferimento alla configurazione indeformata della trave.
Ipotesi 3: il legame costitutivo della trave è E-L-O-I (elastico, lineare, omogeneo, isotropo).

4) SISTEMA ISOSTATICO PRINCIPALE (^)

Volendo studiare il problema attraverso l'applicazione del metodo delle forze, procediamo definendo un sistema isostatico principale: si rende il sistema isostatico attraverso l'eliminazione dei vincoli sovrabbondanti e l'inserimento delle rispettive incognite iperstatiche.

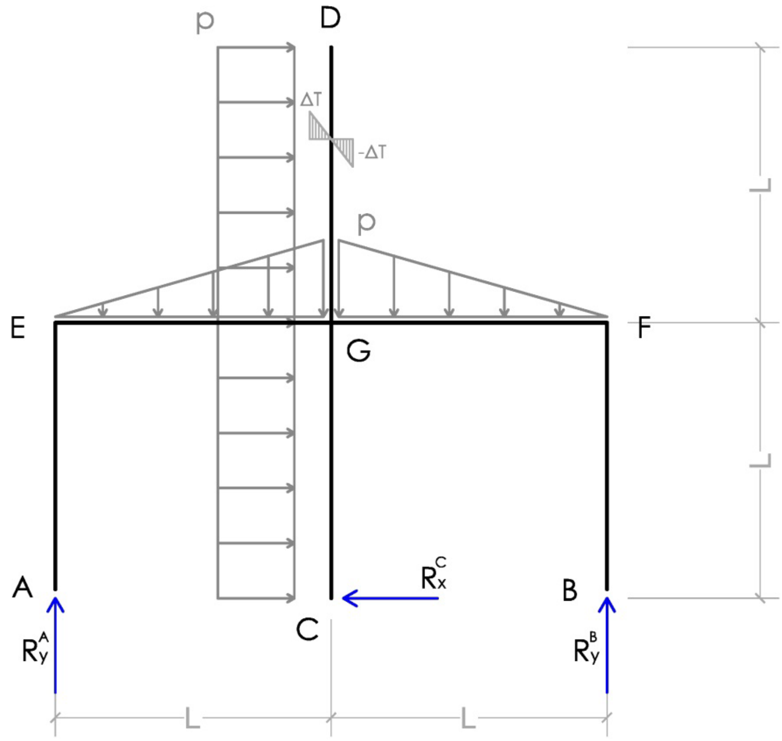


5) SISTEMA (0)

Si considera il sistema principale e vi si applicano le sole forze esterne attive che agiscono nel sistema reale. Si calcolano quindi le caratteristiche della sollecitazione, N_0 T_0 M_0, che equilibrano le forze esterne nel sistema "0": ciò è sempre possibile essendo il sistema "0" isostatico per definizione.

Procediamo togliendo i vincoli ed inserendo le rispettive reazioni vincolari ipotizzandone i versi.

Per lo svolgimento dei calcoli, i carichi distribuiti verranno trattati attraverso la rispettiva forza concentrata equivalente.



Imponiamo l'equilibrio globale del sistema piano con la scrittura delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \sum_i F_{x_i} = 0 \\ \sum_i F_{y_i} = 0 \\ \sum_i M_i^{(o)} = 0 \end{cases}$$

- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p \cdot 2L - R_x^C = 0 \qquad R_x^C = p \cdot 2L = 20 \cdot 8$
  $R_x^C = 160 \ \ [\mathrm{kN}]$

- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\left(\frac{p \cdot L}{2}\right) 2 + R_y^A + R_y^B = 0 \qquad R_y^A = -R_y^B + \left(\frac{20 \cdot 4}{2}\right) 2 = -R_y^B + 80$

- $\sum_i M_i^{(C)} \Rightarrow \ +R_y^B \cdot L - R_y^A \cdot L - p \cdot 2L \cdot L + \left(\frac{20 \cdot 4}{2}\right)\frac{1}{3}L - \left(\frac{20 \cdot 4}{2}\right)\frac{1}{3}L = 0$
  $R_y^B \cdot 4 = R_y^A \cdot 4 + 20 \cdot 8 \cdot 4 \qquad R_y^B = R_y^A + 160$

sostituendo nella seconda equazione:

$R_y^A = -R_y^A - 160 + 80 \qquad 2R_y^A = 80$

$R_y^A = -40 \ \ [\mathrm{kN}]$

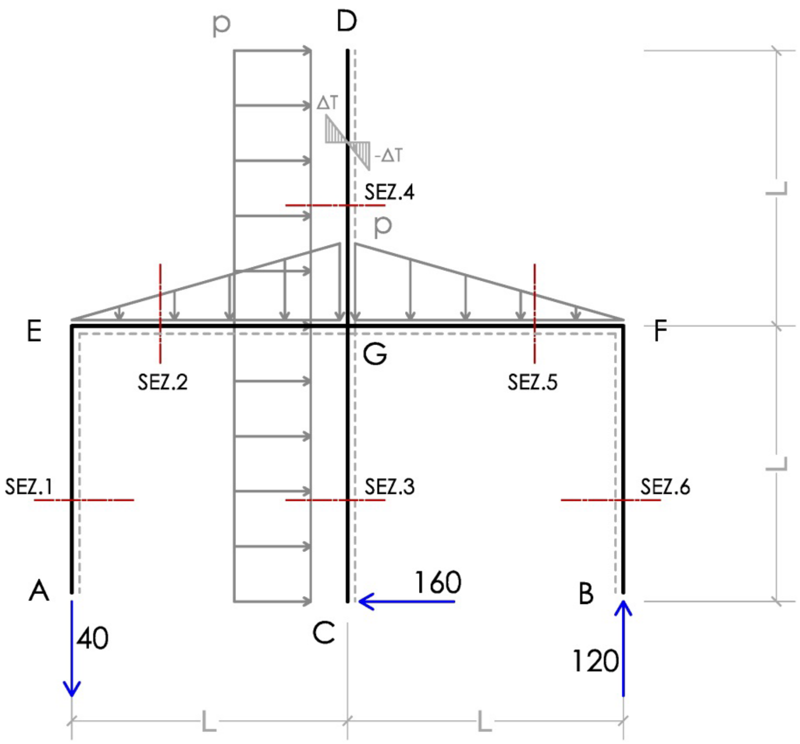
e quindi:

$R_y^B = -40 + 160$

$R_y^B = 120 \ \ [\mathrm{kN}]$

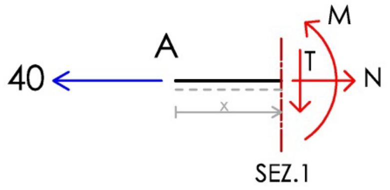
Dai risultati ottenuti vediamo che il verso inizialmente ipotizzato della reazione in A non è corretto e per questo lo invertiamo.

A questo punto segniamo il "sotto" di riferimento (fibre inferiori) del nostro sistema e procediamo con il calcolo delle C.d.S. praticando delle "sezioni" in punti diversi dell'elemento e imponendo l'equilibrio del corpo "tagliato". In corrispondenza della generica sezione verranno inserite le C.d.S. secondo la convenzione positiva dei segni.



SEZ.1 $(0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$

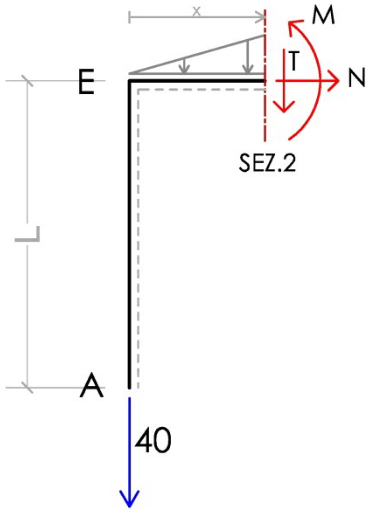
Scegliamo di mettere in equilibrio la parte inferiore e per comodità ruotiamo il disegno.



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -40 + N(x) = 0 \qquad N(x) = 40 \;\; [\text{kN}]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \qquad T(x) = 0 \;\; [\text{kN}]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \qquad M(x) = 0 \;\; [\text{kNm}]$

SEZ.2 $(0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$

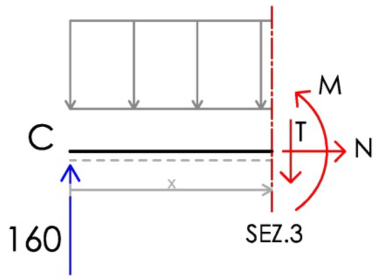
Scegliamo di mettere in equilibrio la parte di sx.



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = 0 \;\; [\text{kN}]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -40 - T(x) - \frac{20}{4} x \frac{x}{2} = 0 \qquad T(x) = -\frac{5}{2} x^2 - 40 \;\; [\text{kN}]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad 40 \cdot x + \frac{20}{4} x \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} + M(x) = 0 \qquad M(x) = -\frac{5}{6} x^3 - 40x \;\; [\text{kNm}]$

SEZ.3 $(0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$

Anche in questo caso mettiamo in equilibrio la parte inferiore.

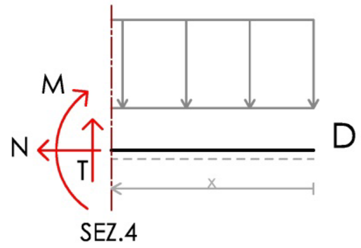


- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = 0 \;\; [\text{kN}]$

- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 160 - T(x) - 20 \cdot x = 0 \qquad T(x) = -20x + 160 \;\; [kN]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad -160 \cdot x + 20 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M(x) = 0 \qquad M(x) = -10x^2 + 160x \;\; [kNm]$

SEZ.4 $\quad (0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$

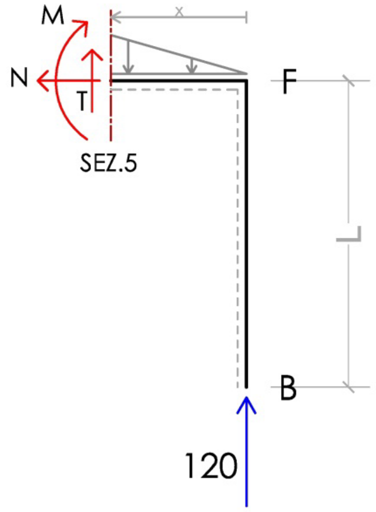
In questa sezione mettiamo in equilibrio la parte superiore e ricaviamo:



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = 0 \;\; [kN]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -20 \cdot x + T(x) = 0 \qquad T(x) = 20x \;\; [kN]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad -20 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - M(x) = 0 \qquad M(x) = -10x^2 \;\; [kNm]$

SEZ.5 $\quad (0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$

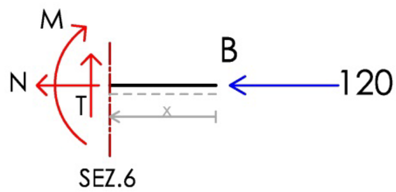
Mettendo in equilibrio la parte di dx ricaviamo:



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = 0 \;\; [kN]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 120 + T(x) - \frac{20}{4} x \frac{x}{2} = 0 \qquad T(x) = \frac{5}{2} x^2 - 120 \;\; [kN]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad 120 \cdot x - \frac{20}{4} x \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} - M(x) = 0 \qquad M(x) = -\frac{5}{6} x^3 + 120x \;\; [kNm]$

SEZ.6 $\quad (0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$

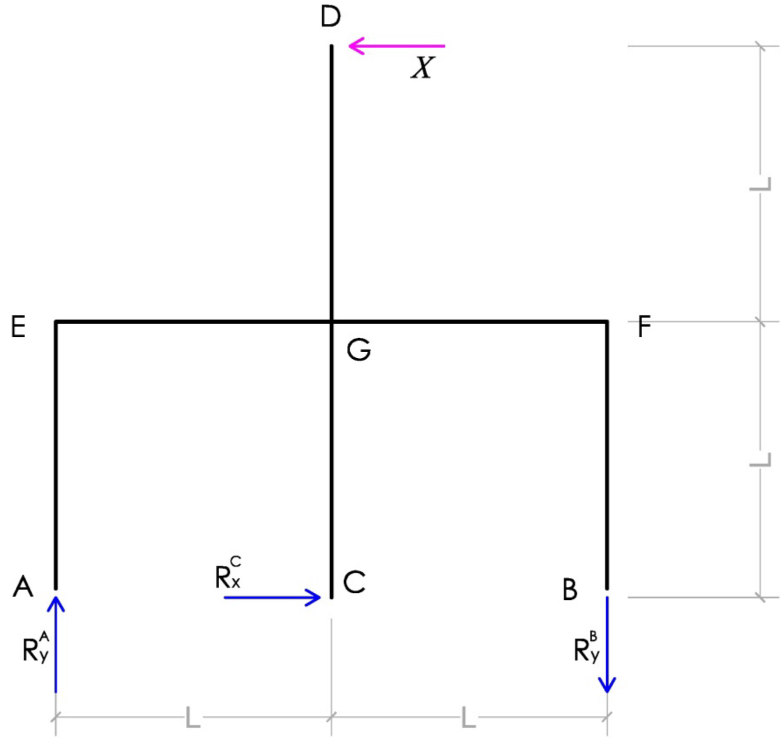
Mettendo in equilibrio sempre la parte inferiore ricaviamo:



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -120 - N(x) = 0 \qquad N(x) = -120 \ \ [\text{kN}]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x) = 0 \ \ [\text{kN}]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad M(x) = 0 \ \ [\text{kNm}]$

6) SISTEMA (1)

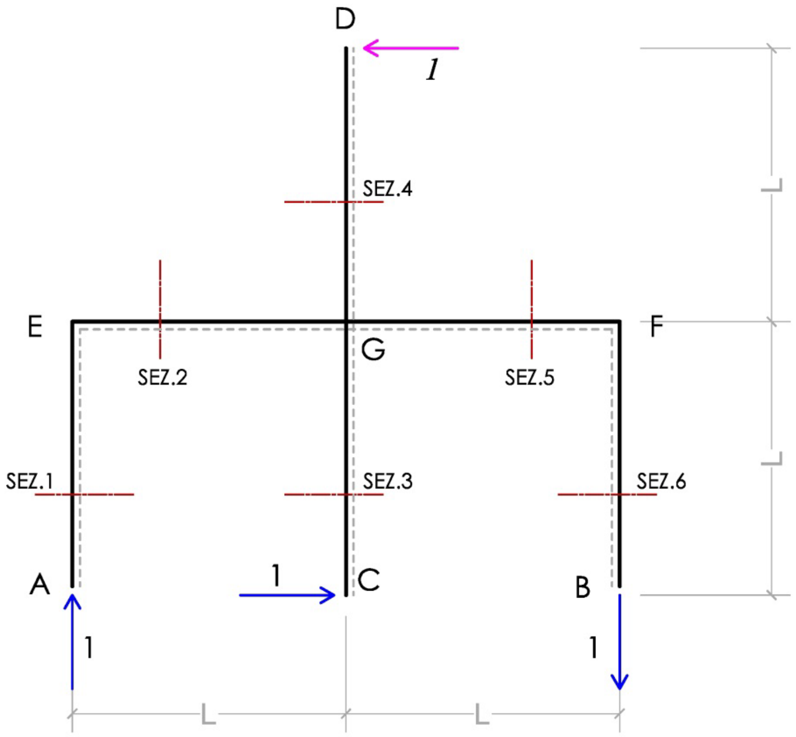
Si considera il sistema principale e vi si applica la sola incognita iperstatica cui si assegna un valore arbitrario (per comodità unitario). Si calcolano quindi le caratteristiche della sollecitazione, $N_1 \; T_1 \; M_1$, che equilibrano le forze esterne nel sistema "1".



Imponiamo l'equilibrio globale del sistema piano con la scrittura delle equazioni cardinali della statica:

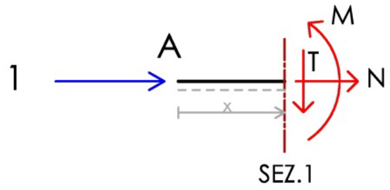
$$\begin{cases} \sum_i F_{x_i} = 0 \\ \sum_i F_{y_i} = 0 \\ \sum_i M_i^{(o)} = 0 \end{cases}$$

- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + R_x^C = 0 \qquad R_x^C = 1$
- R_y^A e R_y^B devono pertanto formare una coppia oraria ed avere intensità pari ad 1.
  $|R_y^A| = |R_y^B| = 1$
- L'equilibrio alla rotazione è dunque verificato dal momento che si hanno due coppie opposte.



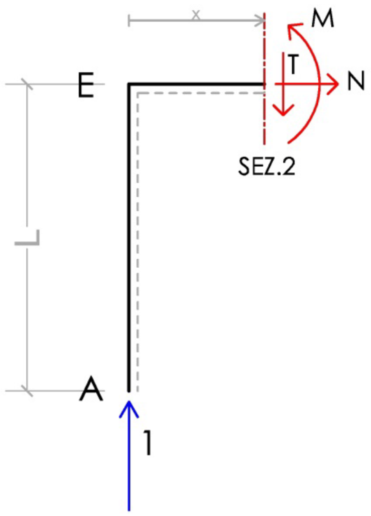
Calcoliamo le C.d.S.:

SEZ.1 $\quad (0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$



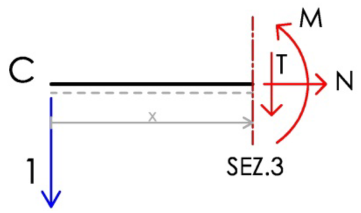
- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + N(x) = 0 \qquad N(x) = -1 \ \ [\text{kN}]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \qquad T(x) = 0 \ \ [\text{kN}]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \qquad M(x) = 0 \ \ [\text{kNm}]$

SEZ.2 $\quad (0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$



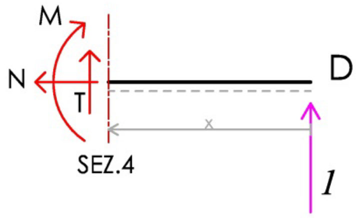
- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = 0 \ \ [\text{kN}]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - T(x) = 0 \qquad T(x) = 1 \ \ [\text{kN}]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot x + M(x) = 0 \qquad M(x) = x \ \ [\text{kNm}]$

SEZ.3 $\quad (0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$



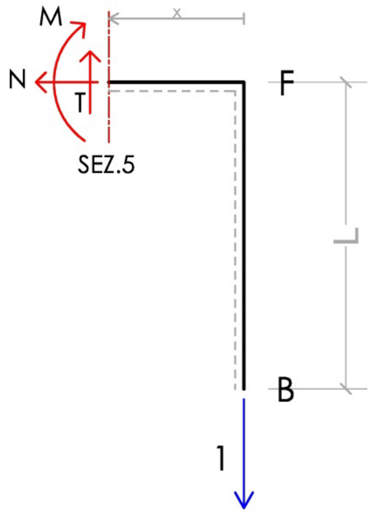
- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = 0 \ \ [\text{kN}]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 - T(x) = 0 \qquad T(x) = -1 \ \ [\text{kN}]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot x + M(x) = 0 \qquad M(x) = -x \ \ [\text{kNm}]$

SEZ.4 $(0 \le x \le 400 \text{ cm})$



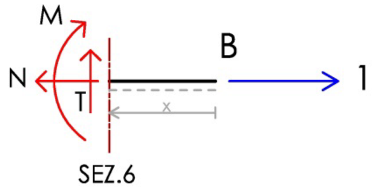
- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = 0 \ [\mathrm{kN}]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + T(x) = 0 \qquad T(x) = -1 \ [\mathrm{kN}]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot x - M(x) = 0 \qquad M(x) = x \ [\mathrm{kNm}]$

SEZ.5 $(0 \le x \le 400 \text{ cm})$



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = 0 \ [\mathrm{kN}]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + T(x) = 0 \qquad T(x) = 1 \ [\mathrm{kN}]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot x - M(x) = 0 \qquad M(x) = -x \ [\mathrm{kNm}]$

SEZ.6 $(0 \le x \le 400 \text{ cm})$



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - N(x) = 0 \qquad N(x) = 1 \ [\mathrm{kN}]$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x) = 0 \ [\mathrm{kN}]$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad M(x) = 0 \ [\mathrm{kNm}]$

7) TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI (T.L.V.)

Ricorrendo al T.L.V., ovvero applicando la formula generale dello spostamento, possiamo determinare l'incognita iperstatica X calcolando lo spostamento in corrispondenza del vincolo soppresso e imponendo che esso soddisfi le condizioni di compatibilità cinematica con il vincolo della struttura reale.
Imponiamo l'uguaglianza tra il lavoro virtuale esterno e il lavoro virtuale interno.
Le grandezze statiche (forze esterne e C.d.S.) saranno prese dal sistema equilibrato (1) [*virtuale*], mentre le grandezze cinematiche (spostamenti e deformazioni) saranno prese dal sistema congruente (0) [*reale*].

$\mathcal{L}_{\mathrm{e}} = \mathcal{L}_{\mathrm{i}}$

Il <u>lavoro interno</u> sarà quello prodotto dalle C.d.S. sulle deformazioni.
Poiché: $\mathrm{E\,A} \to \infty$ e $\mathrm{G\,A^*} \to \infty$, scriviamo:

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}_{\mathrm{i}} = \int_{strutt.} \left\{ \overset{\mathrm{virt}}{\mathrm{M}}(\mathrm{x}) \cdot \overset{\mathrm{eff}}{\chi}(\mathrm{x}) \right\} \mathrm{dx} =$$

$$= \int_{strutt.} \left\{ \mathrm{M_1(x)} \cdot \frac{\mathrm{M_0(x)} + X \cdot \mathrm{M_1(x)}}{\mathrm{E\,I}} \right\} \mathrm{dx} = \frac{1}{\mathrm{E\,I}} \int_{strutt.} \{X \cdot \mathrm{M_1^2(x)} + \mathrm{M_1(x) M_0(x)}\} \mathrm{dx}$$

Nota. Nel tratto DG la curvatura reale sarà data sia dai carichi esterni sia dall'effetto della distorsione termica, pertanto si scriverà:

$$\overset{\mathrm{eff}}{\chi} = \frac{\mathrm{M^{eff}}}{\mathrm{E\,I}} + \chi_{\mathrm{t}}$$

Per effetto della variazione termica a farfalla la trave si riscalda dalla parte sx (opposta al "sotto") e di conseguenza le fibre inferiori, raffreddandosi, si accorceranno dando così luogo ad una concavità opposta a quella cui si attribuirebbe un momento positivo. Pertanto alla curvatura χ_{t} dovrà essere attribuito segno negativo.

Poiché $\Delta\mathcal{T}_{\mathrm{sup}} = +\Delta\mathcal{T}$ e $\Delta\mathcal{T}_{\mathrm{inf}} = -\Delta\mathcal{T}$, scriveremo:

$$\chi_{\mathrm{t}} = -\frac{2 \cdot \Delta\mathcal{T}}{\mathrm{h}} \cdot \alpha$$

(*osservazione*: essendo h, $\Delta\mathcal{T}$, α costanti lungo l'asse della trave, la curvatura χ_{t} sarà costante in dx)

Il <u>lavoro esterno</u> sarà quello prodotto dalle forze esterne sugli spostamenti.
Essendo in questo caso esclusi cedimenti vincolari, per la condizione fisica di vincolo si dovrà avere:

$$\mathrm{w_A} = 0, \qquad \mathrm{w_B} = 0, \qquad \mathrm{u_C} = 0, \qquad \mathrm{u_D} = 0$$

$$\Rightarrow\quad \mathcal{L}_{\mathrm{e}} = -1 \cdot \mathrm{w_A} + 1 \cdot \mathrm{w_B} + 1 \cdot \mathrm{u_C} - 1 \cdot \mathrm{u_D} = 0$$

Sviluppando ed integrando per tratti, otteniamo:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{AE}} = \frac{1}{\mathrm{E\,I}} \int_0^4 \{X \cdot 0^2 + 0 \cdot 0\} \mathrm{dx} = 0$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{EG}} = \frac{1}{\mathrm{E\,I}} \int_0^4 \left\{ X \cdot \mathrm{x}^2 - 40\mathrm{x}^2 - \frac{5}{6}\mathrm{x}^4 \right\} \mathrm{dx} = \frac{1}{\mathrm{E\,I}} \left\{ X \cdot \left[\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_0^4 - 40\left[\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_0^4 - \frac{5}{6}\left[\frac{\mathrm{x}^5}{5}\right]_0^4 \right\} = \frac{1}{\mathrm{E\,I}} \left[\frac{64}{3}X - \frac{2560}{3} - \frac{1024}{6} \right]$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{GF}} = \frac{1}{\mathrm{E\,I}} \int_0^4 \left\{ X \cdot \mathrm{x}^2 - 120\mathrm{x}^2 + \frac{5}{6}\mathrm{x}^4 \right\} \mathrm{dx} = \frac{1}{\mathrm{E\,I}} \left\{ X \cdot \left[\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_0^4 - 120\left[\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_0^4 + \frac{5}{6}\left[\frac{\mathrm{x}^5}{5}\right]_0^4 \right\} = \frac{1}{\mathrm{E\,I}} \left[\frac{64}{3}X - 2560 + \frac{1024}{6} \right]$$

$$\mathcal{L}_i^{CG} = \frac{1}{E\,I}\int_0^4 \{X \cdot x^2 - 160x^2 + 10x^3\}dx = \frac{1}{E\,I}\left\{X \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 - 160\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 + 10\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4\right\} = \frac{1}{E\,I}\left[\frac{64}{3}X - \frac{10240}{3} + 640\right]$$

$$\mathcal{L}_i^{DG} = \int_0^4 \left\{x\left[\frac{X \cdot x - 10x^2}{E\,I} + \chi_t\right]\right\} dx = \frac{1}{E\,I}\left\{X \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 - 10\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4\right\} + \chi_t \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{1}{E\,I}\left[\frac{64}{3}X - 640\right] + 8\,\chi_t$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}_i = \frac{1}{E\,I}\left[\frac{64}{3}X - \frac{2560}{3} - \cancel{\frac{1024}{6}} + \frac{64}{3}X - 2560 + \cancel{\frac{1024}{6}} + \frac{64}{3}X - \frac{10240}{3} + \cancel{640} + \frac{64}{3}X - \cancel{640}\right] + 8\,\chi_t$$
$$= \frac{1}{E\,I}\left[\frac{256}{3}X - \frac{20480}{3}\right] + 8\,\chi_t$$

Uguagliando il lavoro esterno al lavoro interno:

$$\frac{1}{6{,}4 \cdot 10^4}\left[\frac{256}{3}X - \frac{20480}{3}\right] - 8\,\frac{2 \cdot 20}{0{,}4} \cdot 10^{-5} = 0$$

$$\frac{256}{3 \cdot 6{,}4 \cdot 10^4}X = \frac{20480}{3 \cdot 6{,}4 \cdot 10^4} + 8\,\frac{2 \cdot 20}{0{,}4} \cdot 10^{-5}$$

$$X = \frac{20480}{256} + 8\,\frac{120}{256 \cdot 0{,}4} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 86{,}0\ \ [\mathrm{kN}]}$$

8) CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI NEL SISTEMA REALE

Ricavata l'incognita iperstatica X, si determinano le caratteristiche della sollecitazione reali $N^{eff}, T^{eff}, M^{eff}$ mediante le seguenti formule che sfruttano il *principio di sovrapposizione degli effetti*: $[\mathrm{kNm}]$

$$\begin{cases} N^{eff} = N_0 + X \cdot N_1 \\ T^{eff} = T_0 + X \cdot T_1 \\ M^{eff} = M_0 + X \cdot M_1 \end{cases}$$

<u>SEZ.1</u> $\quad (\,0 \le x \le 400\ \mathrm{cm}\,)$

- $N(x) = 40 + 86 \cdot -1 = -46\ \ [\mathrm{kN}]$
- $T(x) = 0 + 86 \cdot 0 = 0\ \ [\mathrm{kN}]$
- $M(x) = 0 + 86 \cdot 0 = 0\ \ [\mathrm{kNm}]$

Come ci si aspettava, nel tratto considerato, abbiamo solo presenza di sforzo normale costante.
Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $\ x = 0$
  $N(x) = -46\ \ [\mathrm{kN}]$
  $T(x) = 0\ \ [\mathrm{kN}]$
  $M(x) = 0\ \ [\mathrm{kNm}]$
- per $\ x = 400\ \mathrm{cm}$
  $N(x) = -46\ \ [\mathrm{kN}]$
  $T(x) = 0\ \ [\mathrm{kN}]$
  $M(x) = 0\ \ [\mathrm{kNm}]$

La reazione vincolare in A sarà dunque diretta vero l'alto e pari a:
$R_y^A = 46\ \ [\mathrm{kN}]$

SEZ.2 $(0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$

- $N(x) = 0 + 86 \cdot 0 = 0 \ [kN]$
- $T(x) = \left(-\frac{5}{2}x^2 - 40\right) + 86 \cdot 1 = -\frac{5}{2}x^2 + 46 \ [kN]$
- $M(x) = \left(-\frac{5}{6}x^3 - 40x\right) + 86 \cdot x = -\frac{5}{6}x^3 + 46x \ [kNm]$

In questo tratto, essendo presente un carico distribuito variabile linearmente, il taglio avrà andamento parabolico ed il momento flettente avrà una dipendenza al cubo da x.
Calcoliamo le funzioni agli estremi:

- per $x = 0$
  $N(x) = 0 \ [kN]$
  $T(x) = 46 \ [kN]$
  $M(x) = 0 \ [kNm]$
- per $x = 400 \text{ cm}$
  $N(x) = 0 \ [kN]$
  $T(x) = 6 \ [kN]$
  $M(x) = 130{,}7 \ [kNm]$

SEZ.3 $(0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$

- $N(x) = 0 + 86 \cdot 0 = 0 \ [kN]$
- $T(x) = (-20x + 160) + 86 \cdot -1 = -20x + 74 \ [kN]$
- $M(x) = (-10x^2 + 160x) + 86 \cdot -x = -10x^2 + 74x \ [kNm]$

Le funzioni agli estremi valgono:

- per $x = 0$
  $N(x) = 0 \ [kN]$
  $T(x) = 74 \ [kN]$
  $M(x) = 0 \ [kNm]$
- per $x = 400 \text{ cm}$
  $N(x) = 0 \ [kN]$
  $T(x) = -6 \ [kN]$
  $M(x) = 136 \ [kNm]$

La reazione vincolare in C sarà diretta vero sinistra e pari a:
$R_y^C = 74 \ [kN]$

SEZ.4 $(0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$

- $N(x) = 0 + 86 \cdot 0 = 0 \ [kN]$
- $T(x) = 20x + 86 \cdot -1 = 20x - 86 \ [kN]$
- $M(x) = -10x^2 + 86 \cdot x = -10x^2 + 86x \ [kNm]$

Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $x = 0$
  $N(x) = 0 \ [kN]$

$T(x) = -86 \ [kN]$
$M(x) = 0 \ [kNm]$

- per $x = 400 \text{ cm}$
  $N(x) = 0 \ [kN]$
  $T(x) = -6 \ [kN]$
  $M(x) = 184 \ [kNm]$

La reazione vincolare in D sarà diretta vero sinistra e pari a:
$R_y^D = 86 \ [kN]$

SEZ.5 $(0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$

- $N(x) = 0 + 86 \cdot 0 = 0 \ [kN]$
- $T(x) = \left(\frac{5}{2}x^2 - 120\right) + 86 \cdot 1 = \frac{5}{2}x^2 - 34 \ [kN]$
- $M(x) = \left(-\frac{5}{6}x^3 + 120x\right) - 86 \cdot x = -\frac{5}{6}x^3 + 34x \ [kNm]$

Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $x = 0$
  $N(x) = 0 \ [kN]$
  $T(x) = -34 \ [kN]$
  $M(x) = 0 \ [kNm]$

- per $x = 400 \text{ cm}$
  $N(x) = 0 \ [kN]$
  $T(x) = 6 \ [kN]$
  $M(x) = 82{,}7 \ [kNm]$

SEZ.6 $(0 \leq x \leq 400 \text{ cm})$

- $N(x) = -120 + 86 \cdot 1 = -34 \ [kN]$
- $T(x) = 0 + 86 \cdot 0 = 0 \ [kN]$
- $M(x) = 0 + 86 \cdot 0 = 0 \ [kNm]$

Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $x = 0$
  $N(x) = -34 \ [kN]$
  $T(x) = 0 \ [kN]$
  $M(x) = 0 \ [kNm]$

- per $x = 400 \text{ cm}$
  $N(x) = -34 \ [kN]$
  $T(x) = 0 \ [kN]$
  $M(x) = 0 \ [kNm]$

La reazione vincolare in B sarà diretta vero l'alto e pari a:
$R_y^B = 34 \ [kN]$

Diagrammi delle C.d.S.