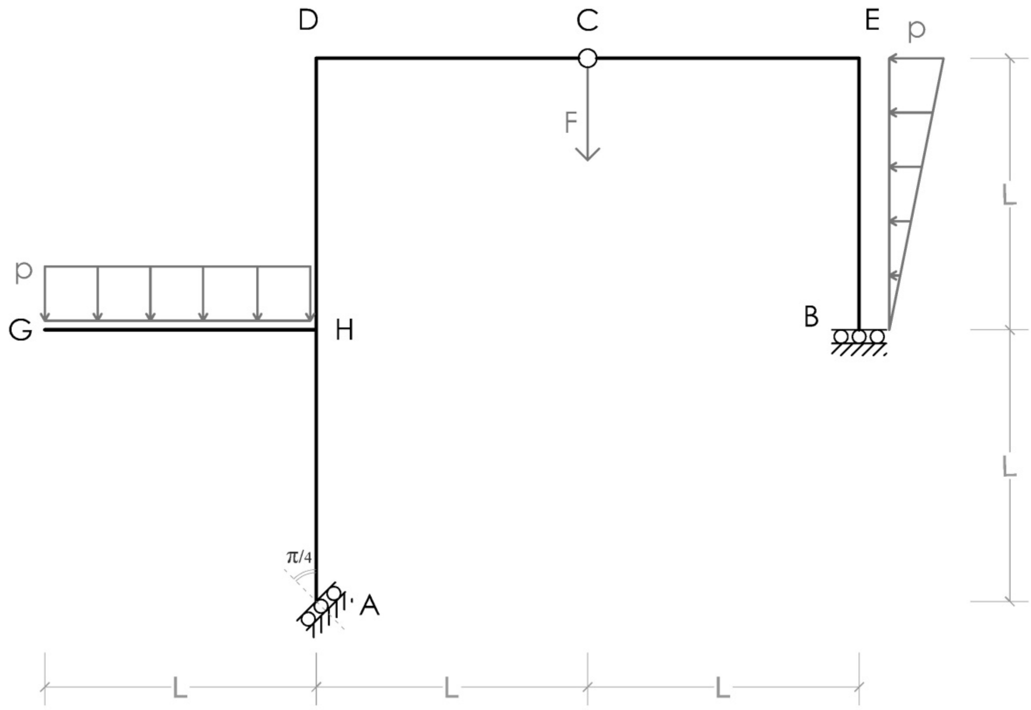
Andrea Valenzi
Ingegnere Civile e Ambientale
servizi per l'ingegneria e l'architettura

www.andreavalenzi.com
info@andreavalenzi.com
02100 - Rieti (RI)

DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI E DIAGRAMMI DELLE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE

ESERCIZIO



DATI:

$L = 400 \text{ cm}$

$F = p \cdot L = 80 \text{ kN}$

$p = 20 \text{ kN/m}$

1) ANALISI CINEMATICA E STATICA DEL SISTEMA

Il sistema è piano e costituito da due corpi vincolati internamente per mezzo di una cerniera. Il sistema risulta essere vincolato esternamente in A e in B da due glifi, il primo inclinato rispetto alla verticale di un angolo pari a $\pi/4$.

I vincoli presenti sono ben disposti, ed hanno una molteplicità totale tale da rendere il sistema STATICAMENTE DETERMINATO:

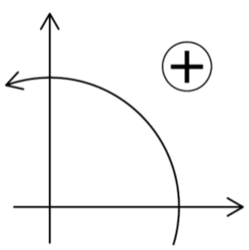
$$g.d.l._{tot} = 3 \cdot 2 = 6 \qquad m_{tot} = m_A + m_B + m_C = 2 + 2 + 2(2-1) = 6$$

$$m_{tot} = g.d.l._{tot}$$

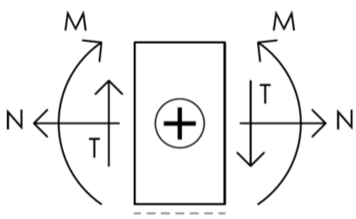
Per tale ragione il sistema potrà essere risolto (cioè si potranno determinare reazioni vincolari e c.d.s.) imponendo le sole condizioni di equilibrio.

2) CONVENZIONI POSITIVE

EQUILIBRIO

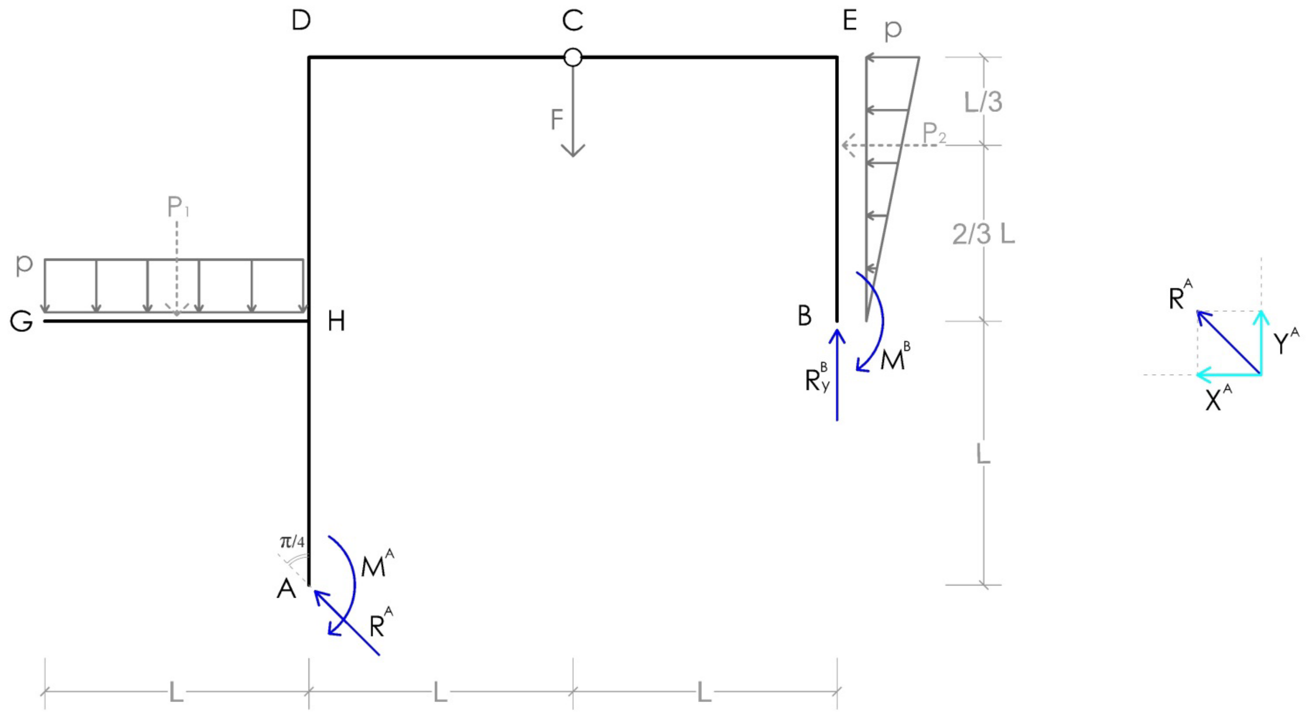


C.D.S.



3) REAZIONI VINCOLARI

Per prima cosa imponiamo l'equilibrio all'intero sistema. Procediamo togliendo i vincoli ed inserendo le rispettive reazioni vincolari ipotizzandone i versi.
Inseriamo inoltre (solo per praticità nello svolgimento dei calcoli) la forza concentrata equivalente ai carichi distribuiti.



Imponiamo l'equilibrio del sistema piano con la scrittura delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \sum_i F_{x_i} = 0 \\ \sum_i F_{y_i} = 0 \\ \sum_i M_i^{(o)} = 0 \end{cases}$$

- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -X^A - P_2 = 0 \qquad -X^A - p\cdot\frac{L}{2} = 0 \qquad R^A\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}pl$

  $$R^A = -\frac{pl}{\sqrt{2}} = -\frac{4\cdot 20}{\sqrt{2}} = -56{,}6\ \mathrm{kN}$$

  Pertanto le sue componenti varranno:

  $$X^A = Y^A = -\frac{pl}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{4\cdot 20}{2} = -40{,}0\ \mathrm{kN}$$

  Il segno meno sta semplicemente ad indicare che il verso ipotizzato della reazione non è corretto e pertanto va cambiato.

- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y^A + R_y^B - F - P_1 = 0 \qquad -\frac{pl}{2} + R_y^B - p\cdot L - p\cdot L = 0 \qquad R_y^B = 2pL + \frac{pl}{2}$

  $$R_y^B = \frac{5}{2}pL = \frac{5\cdot 20\cdot 4}{2} = 200{,}0\ \mathrm{kN}$$

- $\sum_i M_i^{(A)} \quad \Rightarrow \quad P_1 \cdot \frac{L}{2} - F \cdot L + P_2 \cdot \left(L + \frac{2}{3}L\right) + R_y^B \cdot 2L - M^A - M^B = 0$

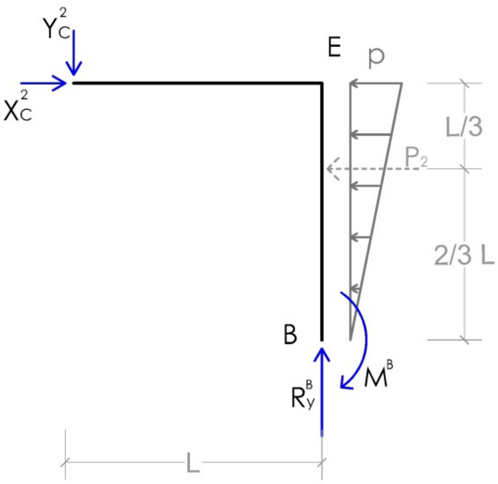
$$p \cdot L \cdot \frac{L}{2} - p \cdot L \cdot L + \frac{p \cdot L}{2} \cdot \left(L + \frac{2}{3}L\right) + \frac{5}{2}pL \cdot 2L - M^A - M^B = 0$$

$$\frac{p \cdot L^2}{2} - p \cdot L^2 + \frac{5}{6}pL^2 + 5pL^2 - M^A - M^B = 0$$

$$M^A = -\frac{p \cdot L^2}{2} + \frac{5}{6}pL^2 + 5pL^2 - M^B = \frac{16}{3}pL^2 - M^B$$

A questo punto passiamo ad esaminare l'equilibrio dei singoli corpi costituenti il sistema:

CORPO 2



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_C^2 - \frac{pl}{2} = 0$

$$X_C^2 = \frac{pl}{2} = 40{,}0\ \mathrm{kN}$$

- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -Y_C^2 + \frac{5}{2}pL = 0$

$$Y_C^2 = \frac{5}{2}pL = 200{,}0\ \mathrm{kN}$$

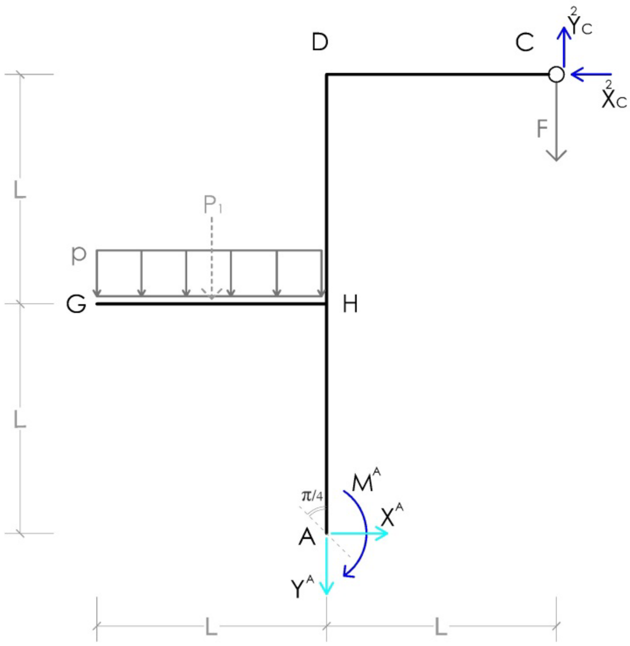
- $\sum_i M_i^{(E)} \quad \Rightarrow \quad -\frac{pl}{2} \cdot \frac{L}{3} - M^B + \frac{5}{2}pL \cdot L = 0$

$$M^B = \frac{5}{2}pL^2 - \frac{1}{6}pL^2 = \frac{7}{3}pL^2 = 747\ \mathrm{kN \cdot m}$$

Possiamo già determinare l'altro momento reazione vincolare sostituendo M^B nell'equazione precedente:

$$M^A = -\frac{p \cdot L^2}{2} + \frac{5}{6}pL^2 + 5pL^2 - M^B = \frac{16}{3}pL^2 - M^B = \frac{16}{3}pL^2 - \frac{7}{3}pL^2 = 3pL^2 = 960\ \mathrm{kN \cdot m}$$

CORPO 1



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -X_C^2 + X^A = -\frac{pl}{2} + -\frac{pl}{2} = 0$

- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -Y^A - pL - F + Y_C^2 = 0$

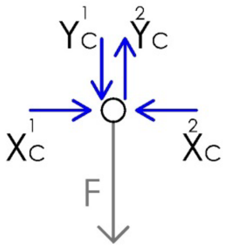
$$-\frac{pl}{2} - pL - pL + \frac{5}{2}pL = 0$$

- $\sum_i M_i^{(A)} \quad \Rightarrow$

$$pL \cdot \frac{L}{2} - M^A - F \cdot L + Y_C^2 \cdot L + X_C^2 \cdot 2L = 0$$

$$\frac{pL^2}{2} - 3pL^2 - pL^2 + \frac{5}{2}pL^2 + pL^2 = 0$$

CERNIERA



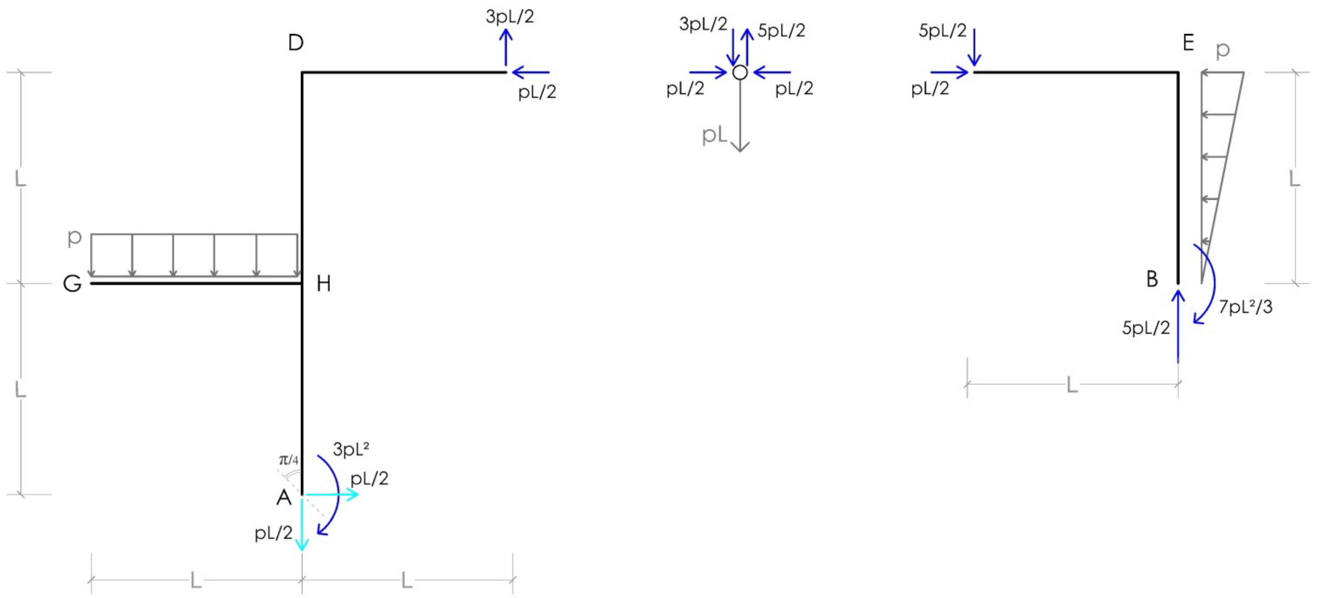
- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \; -X_C^1 + X_C^2 = 0$

$$X_C^1 = X_C^2 = \frac{pl}{2} = 40{,}0 \text{ kN}$$

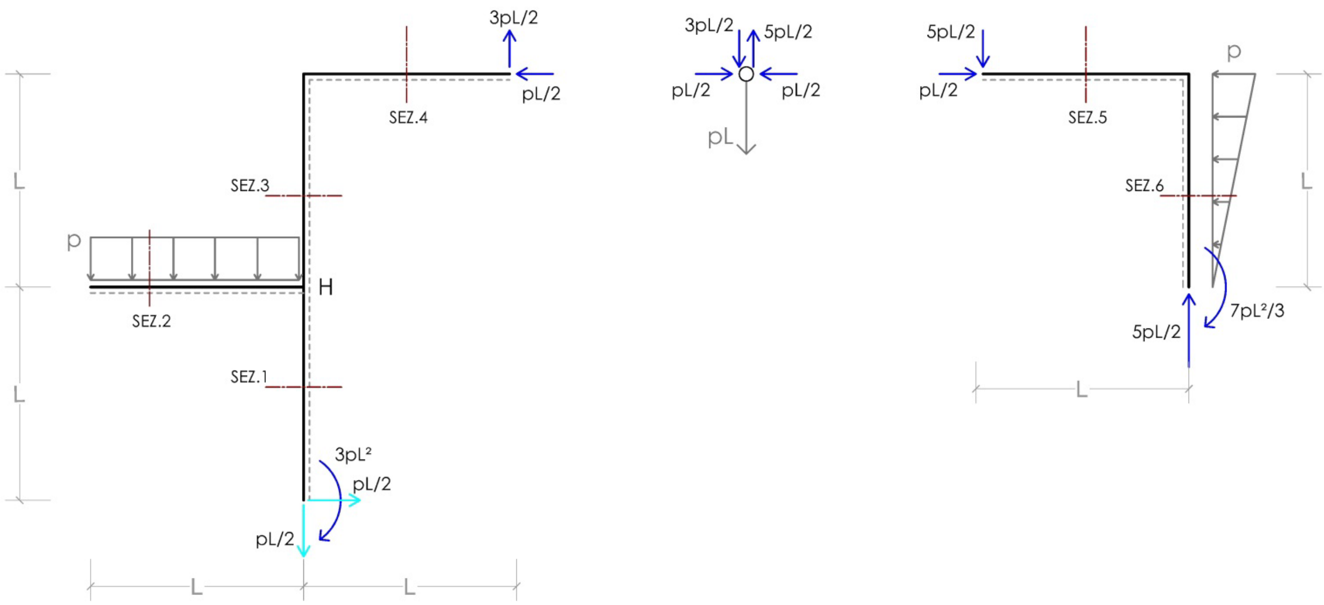
- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \; -Y_C^1 + Y_C^2 - F = 0$

$$Y_C^1 = Y_C^2 - pL = \frac{5}{2}pL - pL = \frac{3}{2}pL = 120{,}0 \text{ kN}$$

SCHEMA DI CORPO LIBERO

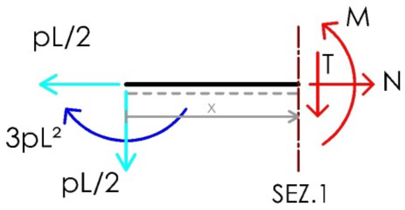


4) CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE



Per la determinazione delle c.d.s. procederemo praticando delle “sezioni” in punti diversi dell’elemento e imponendo l’equilibrio del corpo “tagliato”. Le sezioni dovranno essere praticate prima e dopo i carichi concentrati applicati, in corrispondenza di carichi distribuiti e in presenza di cambiamenti di direzione dell'asse della trave. In corrispondenza della generica sezione verranno inserite le c.d.s. secondo la convenzione positiva dei segni.

SEZ.1 $(0 \leq x \leq L = 400 \text{ cm})$
Scegliamo di mettere in equilibrio la parte di sx.



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{pl}{2} + N(x) = 0 \qquad N(x) = \frac{pl}{2} = 40 \ \text{kN}$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{pl}{2} - T(x) = 0 \qquad T(x) = -\frac{pl}{2} = -40 \ \text{kN}$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad -3pL^2 + \frac{pl}{2} \cdot x + M(x) = 0 \qquad M(x) = 3pL^2 - \frac{pl}{2} \cdot x \ \ \text{kN} \cdot \text{m}$

Come ci si aspettava, nel tratto considerato, sforzo normale e taglio sono costanti; mentre il momento flettente varia con legge lineare.
Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $x = 0$

  $N(x) = \frac{pl}{2} = 40 \ \text{kN}$

  $T(x) = -\frac{pl}{2} = -40 \ \text{kN}$

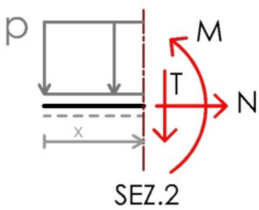
  $M(x) = 3pL^2 = 960 \ \text{kN} \cdot \text{m}$
- per $x = L = 400 \text{ cm}$

  $N(x) = \frac{pl}{2} = 40 \ \text{kN}$

  $T(x) = -\frac{pl}{2} = -40 \ \text{kN}$

  $M(x) = \frac{5}{2} pL^2 = 800 \ \text{kN} \cdot \text{m}$

SEZ.2 $(0 \leq x \leq L = 400 \text{ cm})$
Scegliamo di mettere in equilibrio la parte di sx.



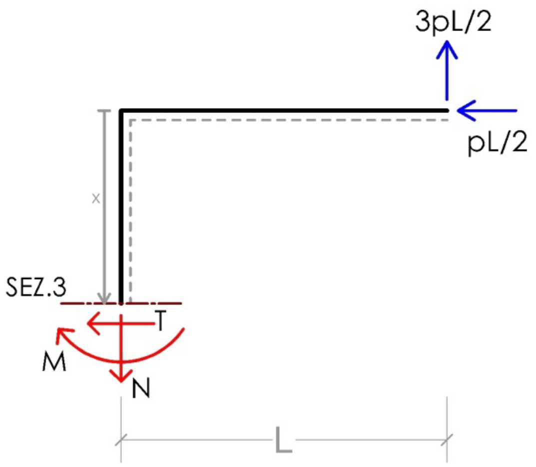
- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = 0 \ \text{kN}$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -p \cdot x - T(x) = 0 \qquad T(x) = -p \cdot x \ \text{kN}$

- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad p \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M(x) = 0 \qquad M(x) = -p \cdot x^2 \;\; kN \cdot m$

In questo tratto, invece, essendo presente un carico uniformemente distribuito, il taglio varierà linearmente, mentre il momento flettente varierà parabolicamente.
Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $x = 0$
  $N(x) = 0 \;\; kN$
  $T(x) = 0 \;\; kN$
  $M(x) = 0 \;\; kN \cdot m$
- per $x = L = 400 \; cm$
  $N(x) = 0 \;\; kN$
  $T(x) = -p \cdot L = -80 \;\; kN$
  $M(x) = -p \cdot L^2 = 320 \;\; kN \cdot m$

<u>SEZ.3</u> $\quad (0 \le x \le L = 400 \; cm)$
In questo caso decidiamo di mettere in equilibrio la parte di dx.



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{pl}{2} - T(x) = 0 \qquad T(x) = -\frac{pl}{2} = -40 \;\; kN$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}pL - N(x) = 0 \qquad N(x) = \frac{3}{2}pL = 120 \;\; kN$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad \frac{pl}{2} \cdot x + \frac{3}{2}pL \cdot L - M(x) = 0 \qquad M(x) = \frac{3}{2}pL^2 + \frac{pl}{2} \cdot x \;\; kN \cdot m$

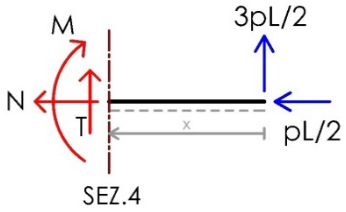
Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $x = 0$
  $N(x) = \frac{3}{2}pL = 120 \;\; kN$
  $T(x) = -\frac{pl}{2} = -40 \;\; kN$
  $M(x) = \frac{3}{2}pL^2 = 480 \;\; kN \cdot m$
- per $x = L = 400 \; cm$
  $N(x) = \frac{3}{2}pL = 120 \;\; kN$

$$T(x) = -\frac{pl}{2} = -40 \;\; kN$$
$$M(x) = 2pL^2 = 640 \;\; kN \cdot m$$

<u>SEZ.4</u> $\quad (0 \leq x \leq L = 400 \text{ cm})$

Anche in questo caso mettendo in equilibrio la parte di dx ricaviamo:



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; -\frac{pl}{2} - N(x) = 0 \qquad N(x) = -\frac{pl}{2} = 40 \;\; kN$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{3}{2}pL + T(x) = 0 \qquad T(x) = -\frac{3}{2}pL = 120 \;\; kN$
- $\sum_i M_i^{(S)} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{3}{2}pL \cdot x - M(x) = 0 \qquad M(x) = \frac{3}{2}pL \cdot x \;\; kN \cdot m$

Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $\;x = 0$

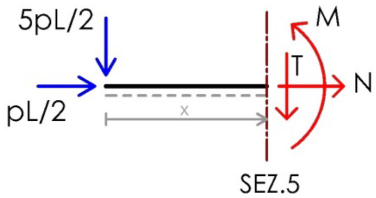
$$N(x) = -\frac{pl}{2} = 40 \;\; kN$$
$$T(x) = -\frac{3}{2}pL = 120 \;\; kN$$
$$M(x) = 0 \;\; kN \cdot m$$

- per $\;x = L = 400 \text{ cm}$

$$N(x) = -\frac{pl}{2} = 40 \;\; kN$$
$$T(x) = -\frac{3}{2}pL = 120 \;\; kN$$
$$M(x) = \frac{3}{2}pL^2 = 480 \;\; kN \cdot m$$

<u>SEZ.5</u> $\quad (0 \leq x \leq L = 400 \text{ cm})$

Mettendo in equilibrio la parte di sx ricaviamo:



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{pl}{2} + N(x) = 0 \qquad N(x) = -\frac{pl}{2} = 40 \;\; kN$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; -\frac{5}{2}pL - T(x) = 0 \qquad T(x) = -\frac{5}{2}pL = 200 \;\; kN$
- $\sum_i M_i^{(S)} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{5}{2}pL \cdot x + M(x) = 0 \qquad M(x) = -\frac{5}{2}pL \cdot x \;\; kN \cdot m$

Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $x = 0$

  $N(x) = -\frac{pl}{2} = 40 \;\; kN$

  $T(x) = -\frac{5}{2}pL = 200 \;\; kN$

  $M(x) = 0 \;\; kN \cdot m$

- per $x = L = 400 \; cm$

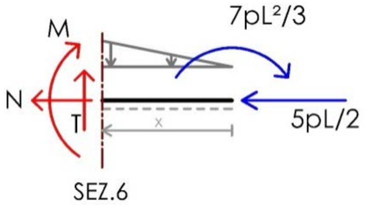
  $N(x) = -\frac{pl}{2} = 40 \;\; kN$

  $T(x) = -\frac{5}{2}pL = 200 \;\; kN$

  $M(x) = \frac{5}{2}pL^2 = 800 \;\; kN \cdot m$

SEZ.6 $\quad (0 \leq x \leq L = 400 \; cm)$

Mettendo in equilibrio la parte di dx ricaviamo:



- $\sum_i F_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{2}pL - N(x) = 0 \qquad N(x) = -\frac{5}{2}pL = 200 \;\; kN$
- $\sum_i F_{y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{p}{L}x \cdot \frac{x}{2} + T(x) = 0 \qquad T(x) = \frac{p}{2L}x^2 \quad kN$
- $\sum_i M_i^{(S)} \quad \Rightarrow \quad -\frac{7}{3}pL^2 - M(x) - \frac{p}{L}x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 0 \qquad M(x) = -\frac{7}{3}pL^2 - \frac{p}{6L}x^3 \quad kN \cdot m$

Calcoliamo ora le funzioni agli estremi:

- per $x = 0$

  $N(x) = -\frac{5}{2}pL = 200 \;\; kN$

  $T(x) = 0 \;\; kN$

  $M(x) = -\frac{7}{3}pL^2 = 747 \; kN \cdot m$

- per $x = L = 400 \; cm$

  $N(x) = -\frac{5}{2}pL = 200 \;\; kN$

  $T(x) = \frac{1}{2}pL = 200 \;\; kN$

  $M(x) = \frac{15}{6}pL^2 = 800 \;\; kN \cdot m$

Andiamo ora a **diagrammare** le caratteristiche della sollecitazione: